

文章编号:1000-8055(2013)01-0038-08

干摩擦对称黏滑响应的级数解及黏滑边界特性

钱大帅, 刘占生, 王 乐, 解 亮

(哈尔滨工业大学 能源科学与工程学院, 哈尔滨 150001)

摘 要: 针对航空发动机中的摩擦振动问题, 给出了对称黏滑运动摩擦力的分段表达式. 利用谐波平衡方法推导了具有偶数次黏着的黏滑运动的级数形式解析解, 并基于该解析解给出了参数平面内的黏滑边界线方程. 黏滑运动响应仅包含奇次谐波成分, 在奇次分数倍频处存在超谐波共振. 当频率比小于 0.4 时, 黏滑边界线呈现凸凹交替特征, 局部极小值位于各阶超谐波共振频率处. 黏性阻尼增大能够缩小无黏着运动的参数范围, 但在各阶超谐波共振频率附近, 黏性阻尼增大会扩大无黏着运动的参数区域.

关 键 词: 干摩擦; 对称黏滑运动; 级数解; 黏滑边界; 超谐波共振

中图分类号: V231.92; O322; O313.3

文献标志码: A

Series solution of symmetric dry frictional stick-slip motion and stick-slip boundary characteristics

QIAN Da-shuai, LIU Zhan-sheng, WANG Le, XIE Liang

(School of Energy Science and Engineering,

Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: To study frictional vibration problems in aero-engine, piecewise expression of frictional force in symmetric stick-slip motion was presented. Analytical series solution of symmetric stick-slip motion with even stops was derived by using harmonic balance method. Stick-slip boundary function in parameter plane was derived based on the series solution. Stick-slip response contained only odd harmonic components and super-harmonic resonances existed at odd fractional frequency ratios. When frequency ratio was less than 0.4, the stick-slip boundary curve had the feature of concave-convex alternation and its local minimums located at the super-harmonic resonant frequencies. Increase in viscous damping reduced the non-sticking parameter range at most frequency ratio ranges except near super-harmonic resonant frequencies, where larger viscous damping led to larger non-sticking parameter range.

Key words: dry friction; symmetric stick-slip motion; series solution; stick-slip boundary; super-harmonic subresonant

干摩擦振动问题在航空动力机械设备中广泛存在. 一方面, 干摩擦结构常被用于耗能阻尼减振, 如航空发动机叶片减振中的叶冠、拉金、缘板及叶根摩擦阻尼装置、针对转子系统的弹支干摩擦阻

尼器等; 另一方面, 发动机部件中可能存在各种有害摩擦作用, 如当转子与密封件发生碰摩时, 会引起轴系异常振动和零件磨损, 造成发动机故障.

在某些工况条件下, 航空发动机中的干摩擦

收稿日期: 2012-01-12

网络出版地址: http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2297.V.20130114.1726.201301.38_006.html

作者简介: 钱大帅(1984—), 男, 安徽宿州人, 博士生, 主要从事转子动力学、非光滑动力学研究.

系统会出现黏滑振动,这种特殊的振动形式可能会对发动机性能造成较大影响.因此,在阻尼耗能机理、致振机理等方面对干摩擦黏滑运动开展研究具有重要的意义.在黏滑运动研究中,黏着发生的条件和黏滑边界特性受到了广泛关注.如果能够给出黏着发生的参数条件,就能更有效地避免或利用干摩擦系统的黏滑运动特性,为航空发动机的结构设计和振动监测提供指导. Lim 和 Chen^[1]对单自由度皮带驱动干摩擦振子的黏滑特性进行了理论和实验研究,结果表明黏滑运动和稳态滑动运动之间的分界对应着系统分岔从超临界向亚临界的转变. Batako 和 Lalor^[2]研究了两自由度皮带驱动干摩擦振子的分岔特性,指出可以从两参数分岔图来识别不同黏滑运动状态及其之间的转换. Liang 和 Feeny^[3]对干摩擦振子黏滑转换特性的仿真和实验研究结果表明,小波方法可以有效地在频域和时域内识别出黏滑转换区间的动力学特性. Luo 和 Gegg^[4-5]基于微分包含理论对非光滑系统开展研究,给出了连通映射结构,提出了黏滑运动和擦边分岔发生的准则和判断条件. Hong 和 Liu^[6-7]对简谐激励下无黏性阻尼干摩擦振子的黏滑运动进行了分析,绘制了参数平面内干摩擦振子黏着次数的分布图. 郭树起、杨绍普等^[8-9]在 Den Hartog 和 Hong 等人关于摩擦振子无黏着运动解研究的基础上,采用弱化的假设条件,证明系统解具有对称性,给出了不同黏性阻尼条件下纯滑动运动的统一解析表达式,并给出了黏滑边界(stick-slip boundary, SSB). Liu 和 Chang^[10], Andreaus 等^[11]分别指出采用依赖于速度的干摩擦模型对皮带驱动黏滑系统进行研究时,存在发生黏着的临界传动速度. Duan 等^[12-13]研究了纯滑至黏滑状态的边界预测问题,提出了基于扭矩假设和速度轮廓的解析方法. 丁旺才和张有强等^[14-15]发展了干摩擦系统滑动状态与黏着状态分界点的理论判定方法,并利用数值结果验证了其方法的有效性.

上述研究是基于对黏滑运动的数值、解析或准解析研究进行的,其中解析和准解析解对航空动力机械摩擦振动问题具有更加重要的意义.由于干摩擦系统是典型的 Filippov 系统,其非光滑特性给解析求解带来了较大困难,对黏滑响应的解析求解多是采用分段、拼缝等方法求解,然后基于纯滑动运动分析得到黏着边界^[6,8-9]. 这些解析求解方法过程较为复杂,通用性不够好.为此,本文寻求具有全局意义的对称黏滑响应级数形式解

析解,给出黏着边界方程并讨论黏滑边界特性,为航空发动机的减振降噪和振动监测提供设计准则和技术依据.

1 对称黏滑运动中的摩擦力

航空动力机械干摩擦振动问题一般可以按照含黏性阻尼干摩擦受迫振动问题进行建模和分析.简谐激励作用下单自由度摩擦振子的动力学方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin(\omega t + \varphi) + F_f \quad (1)$$

其中 F_0 和 ω 分别是简谐激励力幅值和角频率, φ 是位移响应落后于简谐激励力的相位角, F_f 是摩擦力.

摩擦力遵守集值库仑定律

$$F_f \in \begin{cases} -\mu N & \dot{x} > 0 \\ [-\mu N, \mu N] & \dot{x} = 0 \\ \mu N & \dot{x} < 0 \end{cases} \quad (2)$$

图1给出了式(1)所示系统黏滑运动稳态响应的仿真结果,在一个激励周期内,系统发生了4次黏着.

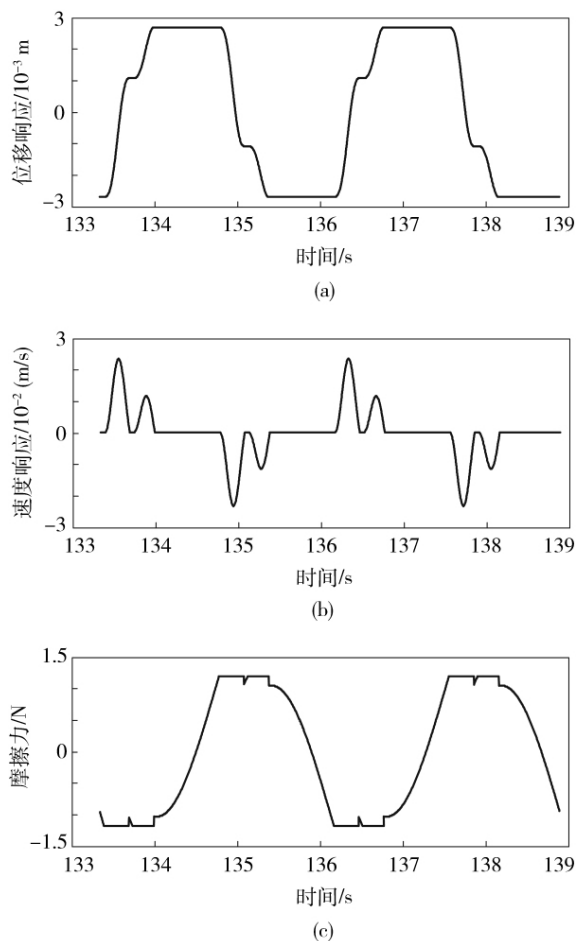


图1 黏滑运动响应和摩擦力曲线

Fig. 1 Stick-slip response and frictional force curves

由动力学方程和仿真结果可知,对称黏滑运动的稳态响应具有以下特点:

1) 周期性:其周期与简谐激励周期相同,即 $T=2\pi/\omega$.

2) 对称性,即

$$\begin{cases} x(t) = -x\left(t + \frac{T}{2}\right) \\ F_f(t) = -F_f\left(t + \frac{T}{2}\right) \end{cases} \quad (3)$$

3) 黏着和滑动阶段交替出现.在黏着阶段,系统位移不变,静摩擦力大小由受力平衡决定.

设在一个激励周期内,系统响应发生 $2r$ 次黏

着,并设半周期内第 $i(i=1,2,\dots,r)$ 个滑动阶段始末时间点分别为 $T_{a,i}$ 和 $T_{b,i}$.由于黏着和滑动阶段交替出现,紧随其后的黏着阶段始末时间点为 $T_{b,i}$ 和 $T_{a,i+1}$.根据摩擦定律,第 i 个滑动阶段的摩擦力为

$$F_f = -\mu N \operatorname{sgn}(\dot{x}) \quad t \in [T_{a,i}, T_{b,i}) \quad (4)$$

设第 i 个黏着阶段的位移幅值为 $x_{a,i}$,该黏着阶段摩擦力可以根据受力平衡给出

$$F_f = kx_{a,i} - F_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad t \in [T_{b,i}, T_{a,i+1}) \quad (5)$$

不失一般性,可以将时间周期 $[0, T)$ 内的摩擦力表示为

$$F_f = \begin{cases} \mu N & t \in [T_{a,1}, T_{b,1}) \\ kx_{a,1} - F_0 \sin(\omega t + \varphi) & t \in [T_{b,1}, T_{a,2}) \\ \vdots & \vdots \\ \mu N & t \in [T_{a,r}, T_{b,r}) \\ kx_{a,r} - F_0 \sin(\omega t + \varphi) & t \in [T_{b,r}, T_{a,r+1}) \\ -\mu N & t \in [\frac{T}{2}, \frac{T}{2} + T_{b,1}) \\ -kx_{a,1} - F_0 \sin(\omega t + \varphi) & t \in [\frac{T}{2} + T_{b,1}, \frac{T}{2} + T_{a,2}) \\ \vdots & \vdots \\ -\mu N & t \in [\frac{T}{2} + T_{a,r}, \frac{T}{2} + T_{b,r}) \\ -kx_{a,r} - F_0 \sin(\omega t + \varphi) & t \in [\frac{T}{2} + T_{b,r}, T) \end{cases} \quad (6)$$

注意式(6)中的特殊时间点

$$T_{a,1} = 0 \quad T_{a,r+1} = \frac{T}{2} \quad (7)$$

积分可以得到各项系数 a_0 , b_0 和 b_n 为

$$a_0 = 0 \quad (9)$$

2 黏滑运动响应的级数形式解

2.1 摩擦力的级数形式

将式(6)给出的摩擦力展开为傅里叶级数形式

$$F_f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \quad (8)$$

当 $n=1$ 时

$$\begin{aligned} a_{1,i} &= \frac{\mu N}{\pi} [\sin(\omega T_{b,i}) - \sin(\omega T_{a,i})] + \frac{kx_{a,i}}{\pi} [\sin(\omega T_{a,i+1}) - \sin(\omega T_{b,i})] + \\ &\quad \frac{F_0 \cos \varphi}{4\pi} [\cos(2\omega T_{a,i+1}) - \cos(2\omega T_{b,i})] - \frac{F_0 \sin \varphi}{4\pi} [\sin(2\omega T_{a,i+1}) - \sin(2\omega T_{b,i}) + 2\omega(T_{a,i+1} - T_{b,i})] \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} b_{1,i} &= -\frac{\mu N}{\pi} [\cos(\omega T_{b,i}) - \cos(\omega T_{a,i})] - \frac{kx_{a,i}}{\pi} [\cos(\omega T_{a,i+1}) - \cos(\omega T_{b,i})] + \\ &\quad \frac{F_0 \cos \varphi}{4\pi} [\sin(2\omega T_{a,i+1}) - \sin(2\omega T_{b,i}) - 2\omega(T_{a,i+1} - T_{b,i})] + \frac{F_0 \sin \varphi}{4\pi} [\cos(2\omega T_{a,i+1}) - \cos(2\omega T_{b,i})] \end{aligned} \quad (13)$$

$$a_n = 2 \sum_{i=1}^r a_{n,i} \quad (10)$$

$$b_n = 2 \sum_{i=1}^r b_{n,i} \quad (11)$$

式(10)和式(11)中各项 $a_{n,i}$ 和 $b_{n,i}$ 如式(12)~式(15)所示,其中 $i=1,2,\dots,r$.

当 $n=3,5,7,\dots$ 时

$$a_{n,i} = \frac{\mu N}{n\pi} [\sin(n\omega T_{b,i}) - \sin(n\omega T_{a,i})] + \frac{kx_{a,i}}{n\pi} [\sin(n\omega T_{a,i+1}) - \sin(n\omega T_{b,i})] +$$

$$\frac{F_0 \cos \varphi}{2\pi} \left[\frac{\cos(n+1)\omega T_{a,i+1} - \cos(n+1)\omega T_{b,i}}{n+1} - \frac{\cos(n-1)\omega T_{a,i+1} - \cos(n-1)\omega T_{b,i}}{n-1} \right] -$$

$$\frac{F_0 \sin \varphi}{2\pi} \left[\frac{\sin(n+1)\omega T_{a,i+1} - \sin(n+1)\omega T_{b,i}}{n+1} + \frac{\sin(n-1)\omega T_{a,i+1} - \sin(n-1)\omega T_{b,i}}{n-1} \right] \quad (14)$$

$$b_{n,i} = -\frac{\mu N}{n\pi} [\cos(n\omega T_{b,i}) - \cos(n\omega T_{a,i})] - \frac{kx_{a,i}}{n\pi} [\cos(n\omega T_{a,i+1}) - \cos(n\omega T_{b,i})] +$$

$$\frac{F_0 \cos \varphi}{2\pi} \left[\frac{\sin(n+1)\omega T_{a,i+1} - \sin(n+1)\omega T_{b,i}}{n+1} - \frac{\sin(n-1)\omega T_{a,i+1} - \sin(n-1)\omega T_{b,i}}{n-1} \right] +$$

$$\frac{F_0 \sin \varphi}{2\pi} \left[\frac{\cos(n+1)\omega T_{a,i+1} - \cos(n+1)\omega T_{b,i}}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\omega T_{a,i+1} - \cos(n-1)\omega T_{b,i}}{n-1} \right] \quad (15)$$

所得各谐波项系数表达式只包含奇次谐波项,因此摩擦力可以表达为

$$F_f = \sum_{n=1,3,\dots}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \quad (16)$$

2.2 谐波平衡过程

令

$$A_1 = a_1 + F_0 \sin \varphi \quad B_1 = b_1 + F_0 \cos \varphi$$

$$A_n = a_n \quad B_n = b_n \quad n = 3, 5, 7, \dots \quad (17)$$

可以将式(1)改写为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx =$$

$$\sum_{i=1,3,\dots}^{+\infty} [A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)] \quad (18)$$

设系统位移响应为

$$x = \sum_{n=1,3,\dots}^{+\infty} [g_n \cos(n\omega t) + h_n \sin(n\omega t)] \quad (19)$$

定义 固有频率 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, 力幅比 $R =$

$\frac{\mu N}{F_0}$, 黏性阻尼比 $\zeta = \frac{c}{2m\omega_0}$, 频率比 $\xi = \frac{\omega}{\omega_0}$ 和

$\xi_n = n\xi$, 并令

$$P_n = \frac{1 - \xi_n^2}{(1 - \xi_n^2)^2 + (2\zeta\xi_n)^2}$$

$$Q_n = \frac{2\zeta\xi_n}{(1 - \xi_n^2)^2 + (2\zeta\xi_n)^2} \quad (20)$$

将式(19)代入到方程(18)中,令方程两端同次谐波项系数相等,就可以得到位移响应式(19)的系数表达式 g_n 和 h_n ,进一步求得位移响应的级数形式解析解为

$$x = \sum_{n=1,3,\dots}^{+\infty} \left[\frac{P_n A_n - Q_n B_n}{k} \cos(n\omega t) + \frac{Q_n A_n + P_n B_n}{k} \sin(n\omega t) \right] \quad (21)$$

从式(21)可以看出,黏滑运动响应只包含奇次谐波成分,这与动力机械摩擦振动系统实验测试的频谱分析结果一致.同时,黏滑响应只与干摩擦系统的力幅比、频率比和黏性阻尼比有关.

2.3 待定参数及求解条件

根据上面的推导,式(21)给出的响应表达式中共有 $3r$ 个未知参数:①相位角 φ ;②上半周期内各黏着阶段的位移 $x_{a,i}$ ($i=1,2,\dots,r$);③上半周期内各黏着阶段的开始时间点 $T_{a,i}$ ($i=2,3,\dots,r$);④上半周期内各黏着阶段的结束时间点 $T_{b,i}$ ($i=1,2,\dots,r$).可以根据下述条件进行求解.

1) 当 $t=T_{a,i+1}$ 时,位移和速度响应分别为

$$x|_{t=T_{a,i+1}} = x_{a,i} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (22)$$

$$\dot{x}|_{t=T_{a,i+1}} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (23)$$

2) 在黏着阶段结束、滑动阶段开始的时间点,根据系统受力平衡,有

$$kx_{a,i} = \begin{cases} F_0 \sin(\omega T_{a,i+1} + \varphi) + \mu N & i = 1, \dots, r-1 \\ F_0 \sin(\omega T_{a,r+1} + \varphi) - \mu N & i = r \end{cases} \quad (24)$$

由式(22)~式(24)导出关于 $3r$ 个未知参数的代数方程组,求解出参数后,可以得到具有 $2r$ 次黏着的对称黏滑响应.

从推导过程和解的形式可以看出,级数形式解析解将滑动阶段和黏着阶段进行统一处理,并不进行分段求解和拼接处理,是一种全局形式解.

3 黏滑边界方程

黏滑运动响应的级数形式解析解可以用于航空发动机摩擦振动问题的预测和监测.在航空发动机摩擦耗能阻尼减振结构中,通常要避免黏着的发生以更好地利用接触面的滑动运动进行耗

能. 为合理设计摩擦结构并选择合适的摩擦压紧力, 需要给出摩擦结构发生黏着的基本条件, 即黏滑边界.

为给出黏滑边界方程, 根据上面的推导, 将式(24)代入到式(19)中, 消去 $x_{a,i}$, 可以将 A_n, B_n 按照 φ 整理为

$$A_n = \mu N a_{0,n} + a_{s,n} F_0 \sin \varphi + a_{c,n} F_0 \cos \varphi \quad (25)$$

$$B_n = \mu N b_{0,n} + b_{s,n} F_0 \sin \varphi + b_{c,n} F_0 \cos \varphi \quad (26)$$

其中各项系数 $a_{0,n}, a_{s,n}, a_{c,n}, b_{0,n}, b_{s,n}, b_{c,n}$ 由式(27)~式(38)给出.

当 $n=1$ 时

$$a_{0,1} = 2 \sum_{i=1}^{r-1} \left[\frac{\sin(\omega T_{b,i}) - \sin(\omega T_{a,i})}{\pi} + \frac{\sin(\omega T_{a,i+1}) - \sin(\omega T_{b,i})}{\pi} \right] + 2 \left[\frac{\sin(\omega T_{b,r}) - \sin(\omega T_{a,r})}{\pi} - \frac{\sin(\omega T_{a,r+1}) - \sin(\omega T_{b,r})}{\pi} \right] \quad (27)$$

$$a_{s,1} = 1 + 2 \sum_{i=1}^r \left[\frac{\sin(\omega T_{a,i+1}) - \sin(\omega T_{b,i})}{\pi} \cos(\omega T_{a,i+1}) - \frac{\sin(2\omega T_{a,i+1}) - \sin(2\omega T_{b,i}) + 2\omega(T_{a,i+1} - T_{b,i})}{4\pi} \right] \quad (28)$$

$$a_{c,1} = 2 \sum_{i=1}^r \left[\frac{\sin(\omega T_{a,i+1}) - \sin(\omega T_{b,i})}{\pi} \sin(\omega T_{a,i+1}) + \frac{\cos(2\omega T_{a,i+1}) - \cos(2\omega T_{b,i})}{4\pi} \right] \quad (29)$$

$$b_{0,1} = 2 \sum_{i=1}^{r-1} \left[-\frac{\cos(\omega T_{b,i}) - \cos(\omega T_{a,i})}{\pi} - \frac{\cos(\omega T_{a,i+1}) - \cos(\omega T_{b,i})}{\pi} \right] + 2 \left[-\frac{\cos(\omega T_{b,r}) - \cos(\omega T_{a,r})}{\pi} + \frac{\cos(\omega T_{a,r+1}) - \cos(\omega T_{b,r})}{\pi} \right] \quad (30)$$

$$b_{s,1} = 2 \sum_{i=1}^r \left[-\frac{\cos(\omega T_{a,i+1}) - \cos(\omega T_{b,i})}{\pi} \cos(\omega T_{a,i+1}) + \frac{\cos(2\omega T_{a,i+1}) - \cos(2\omega T_{b,i})}{4\pi} \right] \quad (31)$$

$$b_{c,1} = 1 + 2 \sum_{i=1}^r \left[-\frac{\cos(\omega T_{a,i+1}) - \cos(\omega T_{b,i})}{\pi} \sin(\omega T_{a,i+1}) + \frac{\sin(2\omega T_{a,i+1}) - \sin(2\omega T_{b,i}) - 2\omega(T_{a,i+1} - T_{b,i})}{4\pi} \right] \quad (32)$$

当 $n=3, 5, 7, \dots$ 时

$$a_{0,n} = 2 \sum_{i=1}^{r-1} \left[\frac{\sin(n\omega T_{b,i}) - \sin(n\omega T_{a,i})}{n\pi} + \frac{\sin(n\omega T_{a,i+1}) - \sin(n\omega T_{b,i})}{n\pi} \right] + 2 \left[\frac{\sin(n\omega T_{b,r}) - \sin(n\omega T_{a,r})}{n\pi} + \frac{\sin(n\omega T_{a,r+1}) - \sin(n\omega T_{b,r})}{n\pi} \right] \quad (33)$$

$$a_{s,n} = 2 \sum_{i=1}^r \left[\frac{\sin(n\omega T_{a,i+1}) - \sin(n\omega T_{b,i})}{n\pi} \cos(\omega T_{a,i+1}) - \frac{\sin(n+1)\omega T_{a,i+1} - \sin(n+1)\omega T_{b,i}}{2\pi(n+1)} - \frac{\sin(n-1)\omega T_{a,i+1} - \sin(n-1)\omega T_{b,i}}{2\pi(n-1)} \right] \quad (34)$$

$$a_{c,n} = 2 \sum_{i=1}^r \left[\frac{\sin(n\omega T_{a,i+1}) - \sin(n\omega T_{b,i})}{n\pi} \sin(\omega T_{a,i+1}) + \frac{\cos(n+1)\omega T_{a,i+1} - \cos(n+1)\omega T_{b,i}}{2\pi(n+1)} - \frac{\cos(n-1)\omega T_{a,i+1} - \cos(n-1)\omega T_{b,i}}{2\pi(n-1)} \right] \quad (35)$$

$$b_{0,n} = 2 \sum_{i=1}^{r-1} \left[-\frac{\cos(n\omega T_{b,i}) - \cos(n\omega T_{a,i})}{n\pi} - \frac{\cos(n\omega T_{a,i+1}) - \cos(n\omega T_{b,i})}{n\pi} \right] + 2 \left[-\frac{\cos(n\omega T_{b,r}) - \cos(n\omega T_{a,r})}{n\pi} + \frac{\cos(n\omega T_{a,r+1}) - \cos(n\omega T_{b,r})}{n\pi} \right] \quad (36)$$

$$b_{s,n} = 2 \sum_{i=1}^r \left[-\frac{\cos(n\omega T_{a,i+1}) - \cos(n\omega T_{b,i})}{n\pi} \cos(\omega T_{a,i+1}) + \frac{\cos(n+1)\omega T_{a,i+1} - \cos(n+1)\omega T_{b,i}}{2\pi(n+1)} + \frac{\cos(n-1)\omega T_{a,i+1} - \cos(n-1)\omega T_{b,i}}{2\pi(n-1)} \right] \quad (37)$$

$$b_{c,n} = 2 \sum_{i=1}^r \left[-\frac{\cos(n\omega T_{a,i+1}) - \cos(n\omega T_{b,i})}{n\pi} \sin(\omega T_{a,i+1}) + \frac{\sin(n+1)\omega T_{a,i+1} - \sin(n+1)\omega T_{b,i}}{2\pi(n+1)} - \frac{\sin(n-1)\omega T_{a,i+1} - \sin(n-1)\omega T_{b,i}}{2\pi(n-1)} \right] \quad (38)$$

由于位移响应具有连续性,当 $t = T/2$ 时,
 $x = x_{a,r}$, 并注意到当 $t = T/2$ 时有

$$kx_{a,r} = F_0 \sin(\omega t + \varphi) - \mu N$$

利用响应表达式(21),得到

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{+\infty} [-(P_n A_n - Q_n B_n)] = -F_0 \sin \varphi - \mu N \quad (39)$$

同时,当 $t = T/2$ 时, $\dot{x} = 0$, 即

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{+\infty} [-n(Q_n A_n + P_n B_n)] = 0 \quad (40)$$

将式(25)和式(26)代入到式(39)和式(40)中,整理可以得到

$$\begin{cases} f_1 R + f_2 \sin \varphi + f_3 \cos \varphi = 0 \\ f_4 R + f_5 \sin \varphi + f_6 \cos \varphi = 0 \end{cases} \quad (41)$$

其中

$$\begin{aligned} f_1 &= -1 + \sum_{i=1,3,\dots}^{+\infty} (P_n a_{n,0} - Q_n b_{n,0}) \\ f_2 &= -1 + \sum_{i=1,3,\dots}^{+\infty} (P_n a_{n,s} - Q_n b_{n,s}) \\ f_3 &= \sum_{i=1,3,\dots}^{+\infty} (P_n a_{n,c} - Q_n b_{n,c}) \end{aligned}$$

$$f_4 = \sum_{i=1,3,\dots}^{+\infty} n(Q_n a_{n,0} + P_n b_{n,0})$$

$$f_5 = \sum_{i=1,3,\dots}^{+\infty} n(Q_n a_{n,s} + P_n b_{n,s})$$

$$f_6 = \sum_{i=1,3,\dots}^{+\infty} n(Q_n a_{n,c} + P_n b_{n,c})$$

从式(41)中消去 φ , 得到

$$[(f_3 f_4 - f_1 f_6)^2 + (f_1 f_5 - f_2 f_4)^2] R^2 = (f_2 f_6 - f_3 f_5)^2 \quad (42)$$

式(42)就是干摩擦振子对称黏滑运动的参数控制方程,这些参数包括系统频率比、力幅比、黏性阻尼比,以及各阶段时间点 $T_{a,i}$ 和 $T_{b,i}$.

根据 $T_{a,i}$ 和 $T_{b,i}$ 的定义,当系统响应无黏着时,各黏着阶段时间长度为 0,各时间点应当满足

$$\begin{cases} T_{a,1} = 0 & T_{a,r+1} = T/2 \\ T_{b,i} = T_{a,i+1} & i = 1, \dots, r \end{cases} \quad (43)$$

将式(43)代入到式(42)中,可以解出 ξ - R 参数平面内干摩擦振子发生无黏着与有黏着运动的分界线,即黏滑边界方程

$$R_{ssb} = \sqrt{\frac{[P_1(P_1 - 1) + Q_1^2]^2}{\left[-\frac{4Q_1}{\pi} \sum_n P_n + P_1 + \frac{4P_1}{\pi} \sum_n \frac{Q_n}{n}\right]^2 + \left[-Q_1 - \frac{4Q_1}{\pi} \sum_n \frac{Q_n}{n} - \frac{4(P_1 - 1)}{\pi} \sum_n P_n\right]^2}} \quad (44)$$

4 黏滑边界特性分析

4.1 黏滑边界分布特性

根据黏着边界方程给出黏着边界线如图 2 和图 3 所示. 给定激励频率比 ξ , 当力幅比 R 大于边界线给出的边界值 R_{ssb} 时, 干摩擦系统响应存在黏着, 反之发生无黏着的纯滑动运动. 需要注意的是, 当参数发生变化越过黏滑边界线时, 系统可能从纯滑动运动状态直接转变为黏着次数为 2 次、4 次或更多次的黏滑运动.

黏性阻尼增大能够缩小纯滑动运动的参数区域范围. 在频率比较小($\xi < 20$)时, 黏性阻尼对黏滑边界线的影响较为显著, 而在频率比较大($\xi > 40$)时, 对黏着边界线影响较小. 这与文献[6, 9]给出的解析表达式结果是一致的. 当频率比很大

($\xi > 80$)时, 黏着边界力幅比趋向于稳定值 $R_{ssb} = 0.5371$.

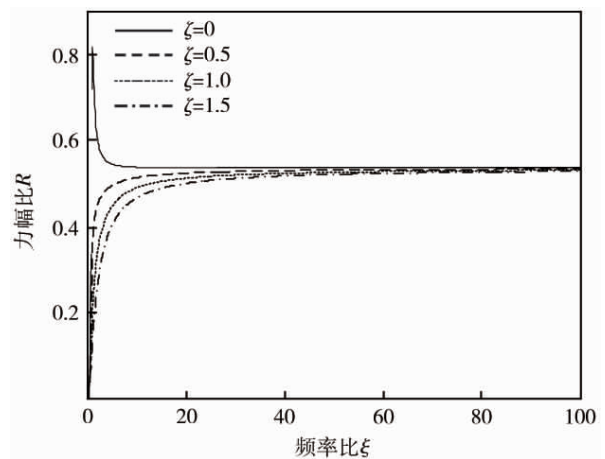
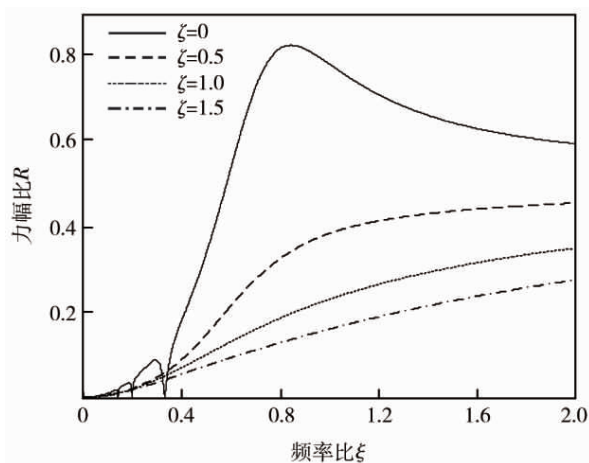


图 2 黏滑边界线 ($0 \leq \xi \leq 100$)

Fig. 2 Stick-slip boundary curves ($0 \leq \xi \leq 100$)

图3 黏滑边界线 ($0 \leq \xi \leq 2$)Fig. 3 Stick-slip boundary curves ($0 \leq \xi \leq 2$)

在进行减振设计时,通常采用较大的黏性阻尼来增强减振效果,但从本节研究结果可以看出,增大黏性阻尼反而会导致纯滑动运动参数区域减小.在某些参数条件下,增大黏性阻尼反而会导致无黏着摩擦系统发生黏着,影响摩擦耗能减振结构的效果.因此,在进行航空发动机耗能减振结构设计时,需要综合考虑摩擦阻尼和黏性阻尼.

4.2 超谐共振与凹凸转换特征

在黏性阻尼为0或很小($0 \leq \zeta \leq 0.2$)的欠阻尼情况下,黏滑边界线在低频范围内($\xi < 0.4$)出现凹凸交替特征,如图3中 $\zeta = 0$ 时的曲线所示.

由响应表达式(21)可知,位移响应的第 n 阶谐波项的幅值可以写为关于频率比 ξ 的函数

$$x_{a,n} = \sqrt{\left(\frac{P_n A_n - Q_n B_n}{k}\right)^2 + \left(\frac{Q_n A_n + P_n B_n}{k}\right)^2} = \frac{\sqrt{(P_n^2 + Q_n^2)(A_n^2 + B_n^2)}}{k} \quad (45)$$

当系统不包含黏性阻尼时, $\zeta = 0$,利用式(20)可以得到

$$P_n = \frac{1}{1 - n^2 \xi^2} \quad Q_n = 0 \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (46)$$

这样,当 $\xi = 1/i, i = 3, 5, 7, \dots$ 时,有

$$P_n \rightarrow +\infty \quad n = i \quad (47)$$

同时当 $n \neq i$ 时, P_n 为有限值,所以

$$x_{an} \rightarrow +\infty \quad n = i \quad (48)$$

因此无阻尼系统在频率比 $\xi = 1/3, 1/5, 1/7, \dots$ 处发生超谐波共振,次共振频率是干摩擦系统固有频率的奇次分数倍频.

利用式(46),可以将黏着边界条件式(44)简化为

$$R_{ssb} = \frac{\sqrt{[P_1(P_1 - 1)]^2}}{\sqrt{P_1^2 + \left[-\frac{4(P_1 - 1)}{\pi} \sum_n P_n\right]^2}} \quad (49)$$

根据式(47)和式(49),当 $\xi = 1/3, 1/5, 1/7, \dots$ 时

$$R_{ssb} \rightarrow 0 \quad (50)$$

上式说明:当 $\xi = 1/3, 1/5, 1/7, \dots$ 时,黏着边界线会无限接近于0,无论摩擦多么小,黏着总会发生,这与文献[9]的结论是一致的.因此,无黏性阻尼时,在这些超谐波共振频率比处,黏着边界线取得局部极小值,这是黏滑边界线出现凹凸转换特征的原因所在.此特性也可以解释 Den Hartog 给出的无黏性阻尼干摩擦振子纯滑动解析解在上述奇次分数倍频处失效的问题^[16-17].

在考虑黏性阻尼的情况下,使得式(45)中 $x_{a,n}$ 取极值的驻点通过下式给出:

$$\frac{d}{d\xi}(P_n^2 + Q_n^2) = 0 \quad (51)$$

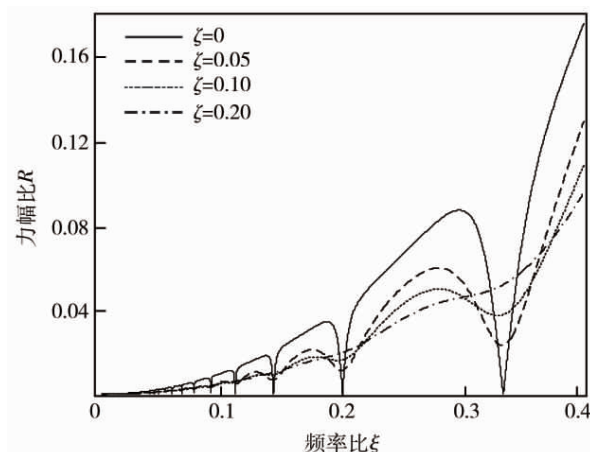
解得有黏性阻尼时超谐波共振频率为

$$\xi = \frac{\sqrt{1 - 2\zeta^2}}{i} \quad i = 3, 5, 7, \dots \quad (52)$$

黏着边界函数式(44)可以看成关于频率比的一元函数 $R_{ssb}(\xi)$,可以验证,当黏性阻尼比足够小时,式(52)所给出的 ξ 满足如下极小值条件:

$$\frac{dR_{ssb}}{d\xi} = 0 \quad \frac{d^2 R_{ssb}}{d\xi^2} > 0 \quad (53)$$

黏着边界线在这些超谐波共振频率处取得局部极小值,如图4中 $\zeta = 0.05$ 曲线所示.

图4 黏滑边界线 ($0 \leq \xi \leq 0.4$)Fig. 4 Stick-slip boundary curves ($0 \leq \xi \leq 0.4$)

随着黏性阻尼比增大,这些局部极小值逐渐增大,同时次共振频率对应的边界线凹谷从左至右依次消失.当黏性阻尼比 $\zeta \geq 0.1652$ 时,图4

中黏滑边界线最右侧对应 $\xi=1/3$ 的局部极小值消失, 凸凹转换特征消失, 黏滑边界线呈现单调变化. 在这些共振频率附近, 黏性阻尼增大反而会扩大无黏着运动的参数范围. 这是由于黏性阻尼增大会抑制对应着次共振的响应项 $x_{a,n}$, 导致发生滑动需要的简谐激励力增大.

5 结 论

针对航空动力机械中常见的摩擦振动问题, 本文推导了对称黏滑响应的级数形式解析解, 并导出了黏滑边界方程.

1) 所给出的级数形式解析解能够统一描述滑动和黏着阶段的运动, 具有全局意义.

2) 黏性阻尼能够影响黏滑边界, 在频率比较小时影响较为显著. 在某些参数情况下, 增大黏性阻尼会导致摩擦减振系统发生黏着, 因而需要在进行航空发动机耗能减振设计时对摩擦阻尼和黏性阻尼进行综合考虑.

3) 当黏性阻尼较小时, 黏滑边界线存在凹凸转换特征, 黏性阻尼增加会导致凸凹转换特征消失. 黏着边界线的凹谷(局部极小值点)位于奇次分数倍频处, 对应着摩擦系统的超谐波共振.

参考文献:

- [1] Lim Y F, Chen K. Dynamics of dry friction: a numerical investigation[J]. Physical Reviews, 1998, 58(5): 5637-5642.
- [2] Batako A D L, Lalor M J, Piiroinen P T. Numerical bifurcation analysis of a friction-driven vibro-impact system[J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 308(2): 392-404.
- [3] Liang J W, Feeny B F. Wavelet analysis of stick-slip in an oscillator with dry friction[C]// ASME Design Engineering Technical Conferences. Boston: ASME, 1995: 1061-1069.
- [4] Luo A C J, Gegg B C. Periodic motions in a periodically forced oscillator moving on an oscillating belt with dry friction[J]. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 2006, 206(1): 212-220.
- [5] Luo A C J, Gegg B C. Stick and non-stick periodic motions in periodically forced oscillators with dry friction[J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 291(1): 132-168.
- [6] Hong H K, Liu C S. Non-sticking oscillation formulae for coulomb friction under harmonic loading [J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, 244(5): 883-898.
- [7] Hong H K, Liu C S. Coulomb friction oscillator: modeling and responses to harmonic loads and base excitations[J]. Journal of Sound and Vibration, 2000, 229(5): 1171-1192.
- [8] 郭树起, 杨绍普, 郭京波. 干摩擦阻尼系统的非黏结受迫振动分析[J]. 振动工程学报, 2005, 18(3): 276-281.
GUO Shuqi, YANG Shaopu, GUO Jingbo. Analysis of non-sticking forced vibrations in a dry friction damper system [J]. Journal of Vibration Engineering, 2005, 18(3): 276-281. (in Chinese)
- [9] 杨绍普, 郭树起. 一类摩擦振子的纯滑动运动分析[J]. 振动与冲击, 2009, 28(10): 43-48.
YANG Shaopu, GUO Shuqi. Analysis of pure slip motions of a class of friction oscillator[J]. Journal of Vibration and Shock, 2009, 28(10): 43-48. (in Chinese)
- [10] Liu C S, Chang W T. Frictional behavior of a belt-driven and periodically excited oscillator[J]. Journal of Sound and Vibration, 2002, 258(2): 247-268.
- [11] Andreaus U, Casini P. Dynamics of friction oscillators excited by a moving base and/or driving force[J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, 245(4): 685-699.
- [12] Duan C. Dynamic analysis of dry friction path in a torsional system[D]. Columbus: Ohio State University, 2004.
- [13] Duan C, Singh R. Dynamics of a 3-D of torsional system with a dry friction controlled path[J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 289(3): 657-688.
- [14] 丁旺才, 张有强, 张庆爽. 含干摩擦振动系统的非线性动力学分析[J]. 工程力学, 2008, 25(10): 212-217.
DING Wangcai, ZHANG Youqiang, ZHANG Qingshuang. Nonlinear dynamic analysis of vibrate system with dry friction[J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(10): 212-217. (in Chinese)
- [15] 张有强, 丁旺才. 干摩擦对碰撞振动系统周期运动的影响分析[J]. 振动与冲击, 2009, 28(6): 111-116.
ZHANG Youqiang, DING Wangcai. Study on effect of dry friction on periodic motion of impact vibration system[J]. Journal of Vibration and Shock, 2009, 28(6): 111-116. (in Chinese)
- [16] Den H J P. Forced vibrations with combined coulomb and viscous friction[J]. Journal of Applied Mechanics, 1931, 53(9): 107-115.
- [17] 郭树起, 杨绍普. 三分之一固有频率谱激励下干摩擦振子的双 Stop 黏滑运动[J]. 振动与冲击, 2009, 28(4): 81-85.
GUO Shuqi, YANG Shaopu. 2-Stop stick-slip motion of a dry friction oscillator under a harmonic excitation of one-third natural frequency [J]. Journal of Vibration and Shock, 2009, 28(4): 81-85. (in Chinese)